UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 24/02/2026

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).
Su examen se mostrará una vez corregido.

T1- Indique si la siguiente proposición es verdadera o falsa demostrándola o bien exhibiendo un contraejemplo según corresponda:

a) "Todo campo escalar diferenciable en un punto es derivable en dicho punto"
b) La ecuación diferencial $x\,y' - y = x^3$ tiene por solución particular a $y = x^2 + 3\,x$ que pasa por el punto (1, 3)

T2- a) Enuncie el teorema de Gauss, explicitando todas sus hipótesis y dando un ejemplo donde se denote su practicidad en el cálculo.

b) Invente con campo vectorial $\bar{f}$ (x, y, z) tal que el flujo a través de cualquier superficie cerrada, de frontera orientable sea igual a tres veces el volumen del cuerpo encerrado por dicha superficie, justifique

P1- Dada la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 9$, **proporcione** una parametrización de dicha curva y **obtenga** la recta tangente en el punto $(-3\,,1)$, si es posible, justificando.

P2 - Dado $\bar{f} \in C^1$ tal que $\bar{f}(x,y) = \left(\, y\,h'(x)\ ,\ h'(x) + 2\,h(x)\,\right)$ con $\bar{f}(0,1) = (2,2)$ **determine** h(x), aplicando el teorema de Green , tal que la circulación de $\bar{f}$ en sentido positivo a lo largo de la frontera de una región D resulte igual a 4 área(D).

P3 - Calcule la integral de línea del campo vectorial:
$\overline{F}(x,y,z) = (y\,z\,, z\,x\,, xy + 2z)$ desde $P_0 = (0,2,z_0)$hasta $P_1 = (1,1,z_1)$ a lo largo de la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $z = x - y$; $y = 2 - x^2$

P4 - Sea f(x,y)= x + y g(x,y) con g diferenciable, sabiendo que g(1,-2)=0, siendo además ∇g(1,-2)=(2,5). **halle** la recta normal a la curva de nivel 1 de f que pasa por el punto (1,-2).

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final	HOJA N° 1/2 FECHA 24-2-25

1) V o F

a) todo campo escalar diferenciable en un punto en un punto es derivable en dicho punto

(V) Si f es diferenciable en (x_0,y_0) entonces:

$$f((x_0,y_0)+\vec{v}) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\,\vec{v} + \varepsilon(\vec{v})\,\|\vec{v}\|$$

$\vec{v} = h\breve{u}$

$$f((x_0,y_0)+h\breve{u}) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\,h\breve{u} + \varepsilon(h\breve{u})\,\|h\breve{u}\|$$

divido por h

$$\frac{f((x_0,y_0)+h\breve{u}) - f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)\,h\breve{u}}{h} + \frac{\varepsilon(h\breve{u})\,|h|\,\|\breve{u}\|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+h\breve{u}) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\nabla f(x_0,y_0)\,\breve{u}}_{\in\mathbb{R}\ (\text{no depende de } h)} + \overbrace{\lim \frac{\varepsilon(h\breve{u})\,|h|}{h}}^{\to 0}$$

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+h\breve{u}) - f(x_0,y_0)}{h}}_{\text{definición de derivada direccional}} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\breve{u}$$

cuando f es diferenciable en (x_0,y_0)

b) La ecuación diferencial $xy' - y = x^3$ tiene por solución particular a $y = x^2+3x$ que pasa por $(1,3)$

$$y = x^2+3x \longrightarrow y' = 2x+3$$

$$xy' - y = x(2x+3) - (x^2+3x) = 2x^2 + \cancel{3x} - x^2 - \cancel{3x} = x^2$$

con $y = x^2+3x$ la ED queda $xy' - y = x^2 \neq x^3$

$\therefore$ $y = x^2+3x$ No es sol. part de la ED

(F)

NOTA

(resuelto por Sylvina)

#2 a) Enunciar el teorema de Gauss, explicitando las hipótesis y dando un ejemplo donde se denote su practicidad en el cálculo

hip $\begin{cases} \bullet\ W \text{ región de } \mathbb{R}^3 \\ \bullet\ S \text{ sup. orientada al exterior, frontera de } W \\ \bullet\ \bar{F} = (P, Q, R) \in C^1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, d\text{vol}$$

donde $\operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z$

Puede ser útil para calcular el flujo a través de una sup. cerrada donde $\bar{F}(x,y,z) = (\alpha(y,z) + x, \beta(x) + 2y, -3z)$

Se desconocen α, β pero se sabe que son C^1

$$\operatorname{div}(\bar{F}) = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = 0$$

b) Inventar un campo vectorial $\bar{F}(x,y,z)$ tal que el flujo a través de cualquier sup. cerrada, de frontera orientable sea igual a tres veces el vol del cuerpo encerrado por dicha superficie

$$f(x,y,z) = (3x, 0, 0) \Rightarrow \operatorname{div}(\bar{F}) = 3$$

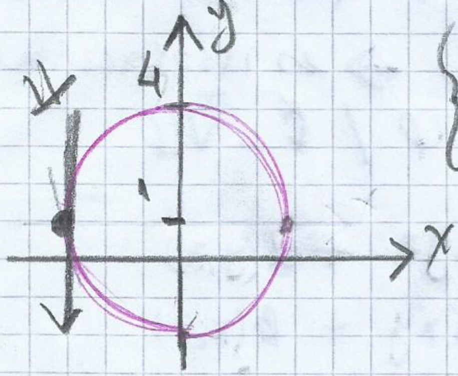
x T. Gauss $\Rightarrow \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W 3\, d\text{vol} = 3 \boxed{\iiint_W d\text{vol}}$

vol. cuerpo encerrado por S

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final	HOJA N° 2/2 FECHA 24-2-25

(P1) Dada la circunferencia $x^2+(y-1)^2=9$ proporcionar una parametrización de dicha curva y obtener la recta tangente en el punto $(-3,1)$



$$\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\,\text{sen}(t)+1 \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$C: \bar{\beta}(t) = (3\cos(t),\ 3\,\text{sen}(t)+1)$$

$$\beta'(t) = (-3\,\text{sen}(t),\ 3\cos(t))$$

$$\bar{\beta}(t_0) = (3\cos(t_0),\ 3\,\text{sen}(t_0)+1) = (-3,1) \rightarrow t = \pi$$

$$\bar{\beta}'(t) = (0,-3)$$

$$\boxed{\mathbb{L}: \bar{\alpha}(t) = t(0,-1) + (-3,1)}$$

(P2) Dado $\bar{f} \in C^1$ tal que $\bar{f}(x,y) = (y\,h'(x),\ h'(x)+2h(x))$ con $f(0,1)=(2,2)$ determinar $h(x)$, aplic. T. Green, tal que la circulación de $\bar{f}$ en sentido positivo a lo largo de la frontera de D resulte 4 Area(D)

x T. Green: $\oint_{C^+} \bar{P}\,d\bar{l} = \iint_D \underbrace{Q'_x - P'_y}_{4}\,dx\,dy = 4 \underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{Área de D}}$

$$4 = Q'_x - P'_y = h''(x) + 2h'(x) - h'(x) = \boxed{h''(x) + h'(x) = 4}$$

SH) $h''(x) + h'(x) = 0 \longrightarrow r^2 + r = 0 \longrightarrow \begin{matrix} r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{matrix}$ $\boxed{h_H = A + Be^{-x}}$ $A, B \in \mathbb{R}$

SP) $h_p = Cx \rightarrow h'_p = C \rightarrow h''_p = 0$

$$\Rightarrow 0 + \boxed{C = 4} \quad \boxed{h_P = 4x} \quad \boxed{h_{gral} = A + Be^{-x} + 4x}$$

Valor inicial: $\bar{f}(0,1) = (2,2) = (\underbrace{1\,h'(0)}_{2},\ \underbrace{h'(0) + 2h(0)}_{2})$ $\quad \begin{matrix} h'(0) = 2 \\ h(0) = 0 \end{matrix}$

$$\left.\begin{matrix} h(0) = A + B = 0 \\ h'(0) = 2 = -Be^{-0} + 4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A + B = 0 \\ -B = -2 \rightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} A = -2 \\ B = 2 \end{matrix}}$$

$$\boxed{h(x) = -2 + 2e^{-x} + 4x}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

(P3) Calcular la integral de línea del campo ~~f(x,y,z)~~ vectorial: $F(x,y,z) = (yz, zx, xy+2z)$ desde $P_0 = (0,2,z_0)$ hasta $P_1 = (1,1,z_1)$ a lo largo de la curva definida por la intersección: $\begin{cases} z = x-y \\ y = 2-x^2 \end{cases}$

uso $z = x-y \longrightarrow P_0 = (0,2,-2) \quad P_1 = (1,1,0)$

Analizo si el campo es conservativo: $\bar{F} \in C^1$ / $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^2$ ✓

$\text{rot}(F) = (x-x, y-y, z-z) = (0,0,0) \rightarrow$ es irrotacional

es un campo conservativo $\rightarrow \exists\, \varphi \,/\, \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

$$\begin{cases} \varphi'_x = yz \xrightarrow{\text{Integro en } x} \varphi(x,y,z) = xyz + \alpha(y,z) \\ \varphi'_y = zx \xrightarrow{\text{int } y} \varphi(x,y,z) = zxy + \beta(x,z) \\ \varphi'_z = xy + 2z \xrightarrow{\text{int en } z} \varphi(x,y,z) = xyz + z^2 + \gamma(x,y) \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi(x,y,z) = xyz + z^2 + c}$$

$$\int_C \bar{F}\, d\bar{l} \overset{\text{conserv.}}{=} \int_C \bar{\nabla}\varphi\, d\bar{l} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0) = c - 4 - c = -4$$

$$\boxed{\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = -4}$$

(P4) Sea $f(x,y) = x + y\,g(x,y)$ con g diferenciable, sabiendo que $g(1,-2) = 0$, siendo $\nabla g(1,-2) = (2,5)$ hallar la recta normal a la curva de nivel 1 de f que pasa por $(1,-2)$

$\bar{\nabla} f \perp$ curva de nivel $\rightarrow$ hallo $\bar{\nabla} f(1,-2)$ para la dirección de la recta normal

$$\bar{\nabla} f(x,y) = \Big(1 + y\,\underbrace{g'_x(x,y)}_{2},\ \underbrace{g(x,y)}_{0} + y\,\underbrace{g'_y(x,y)}_{5}\Big)$$

$$\bar{\nabla} f(1,-2) = (1 + (-2)\cdot 2,\ -2 \times 5) \rightarrow \vec{\nabla} f(1,-2) = (-3,-10)$$

$$\boxed{\mathbb{L}: \bar{P}(t) = t(-3,-10) + (1,-2)} \quad t \in \mathbb{R}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)